A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határán

Karika Tímea – Csíkos Csaba
Szent Lőrinc Katolikus Általános Iskola – Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar

A tanulmány a törtfogalom fejlődésének segítéséről szól. Megoldandó probléma, hogy az alsó tagozat végére, 4. osztályban a tanulók jellemzően egyféle törtértelmezéssel találkoznak: egységtörtek és ezek többszörösei kerülnek elő, általában többféle manipulatív és képi szemléltetés mellett. Ehhez képest 5. osztályos kortól a törtek a racionális számok halmazának képviselőiként kerülnek elő, két egész szám hányadosaként. Ahhoz, hogy az alsó tagozaton kialakult törtfogalom megfelelően segítse a felső tagozatos tanulmányokat, szükségesnek látjuk a C. Neményi Eszter által „második értelmezésnek" nevezett törtértelmezés hangsúlyosabb megjelenését. A törtfogalom második értelmezése azt jelenti, hogy valamely egység többszöröseinek valahányad részeként tekintünk az egységtörtek többszöröseire. Javaslatunkat tankönyvrészletek elemzésével és a nemzetközi szakirodalomban megjelent kutatási eredményekkel támasztjuk alá.

Kulcsszavak: *törtfogalom, alsó tagozatos matematika, felső tagozatos matematika, szemléltetés, tankönyvelemzés*

A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határán

Gyakran halljuk az általános iskola felső tagozatán oktató matematikatanároktól, hogy a tanulók fejletlen törtfogalommal érkeznek az alsó tagozatról: a tanulók számára egyáltalán nem nyilvánvaló például, hogy a háromnegyed az nem csupán a negyed háromszorosa, hanem három egésznek a negyedrésze is. (Sőt, bár talán nem várja el a felső tagozat az alsó tagozattól ennek megmutatását: a három és a négy hányadosa.) Míg az alsó tagozatos tankönyvekben a törtekkel sok konkrét tevékenység közben, a mozgás, látás, tapintás élményét kihasználva foglalkozunk, addig az 5. osztálytól kezdve elkezdjük a törteket racionális számokként kezelni; az alsó tagozaton megszokott számkör-bővítést (amely a természetes számok világán belül történt) számhalmazok bővülő körei váltják föl. A Nemzeti alaptanterv előírása, hogy 4. osztály végére a 2, 3, 4, 10 és 100 nevezőjű törteket ismerjék a tanulók a mindennapi életben.

Meglehetősen régi felismerés a hazai matematikadidaktikában (ld. pl. *C. Neményi*, 2002a) hogy az alsó tagozat vége és a felső tagozat kezdete között hiányzik a szerves átmenet. Nemcsak a minden iskolai évfolyamot érintő nyárvégi teljesítmény-visszaesés, nemcsak a szakos tanári rendszerre átállás, hanem magának a matematika tananyagnak a szerveződése okozza, hogy minden szereplő jelentős, hirtelen ugrásnak érzi, ami 4. és 5. osztály között történik. *C. Neményi, Radnainé Szendrei és Varga* (1981) az utolsó hazai központi, előíró tanterv matematika fejezetének szerzői makacsul ragaszkodtak ahhoz, hogy a fejlesztési feladatokat 1–3., majd 4–5. osztályokra jelöljék ki, eltérően a központi tanterv összes többi fejezetétől, amelyek alsó és felső tagozat között jelölték ki fejlesztési határt. Ugyanakkor a nehezen mozduló iskolai gyakorlat az általános iskola 5. osztályát olyan mérföldkőként kezeli, amely a formalizáltabb matematikatanulás bevezetésével jellemezhető.

A formalizált matematikaoktatás kritikáját a holland realisztikus matematikai mozgalom egyik nagy alakja, Treffers (l. *Van den Heuvel-Panhuizen*, 2000) a horizontális és vertikális matematizálás fogalmával érzékeltette. Míg a horizontális matematizálás a matematikai és a minket körülvevő közötti kapcsolatok megteremtésével, matematikai modellezésével valósul meg, addig a verti-

GYERMEKNEVELÉS – online tudományos folyóirat
Korszerű komplex matematikatanítás, 2018/1

DOI 10.31074/gyn201818698

Csíkos Csaba: orcid.org/0000-0003-3328-5535

kális matematizálás a matematikai fogalmak rendszerén belül maradva építi tovább a matematikai tudást. Problémát az jelent, amikor a vertikális matematizálás túlsúlya azzal jár együtt, hogy már elveszítjük a külvilág matematikai modellezésének igényét, és maguk a matematikai jelek és fogalmak válnak a matematikai gondolkodás szinte kizárólagos nyersanyagává. Minduntalan visszajutunk Bruner elképzeléseihez, aki a különböző tudásreprezentációs formák egymást segítő kapcsolataival képzeli el nemcsak a matematikatanítást, hanem általában véve az iskolai oktatást. A bruneri értelemben vett enaktív (mozgásba, cselekvésbe írt), ikonikus (valamely érzékszervi modalitás által generált képzet) és szimbolikus (elsősorban nyelvi, vagy – különösen a matematikában – más egyezményes kódrendszerben) tárolt tudásformák együttes fejlődése és fejlesztése látszik a leghatékonyabbnak (*Sriraman és English*, 2005).

Mit tehetünk az alsó tagozat végén azért, hogy a törtek tanulása a felső tagozaton egyszerre könnyebb és ugyanakkor szakmailag-matematikailag továbbra is megalapozott legyen? Tanulmányunkban ezt a kérdést igyekszünk körüljárni a hazai, elsősorban C. Neményi Eszter munkásságában lefektetett didaktikai hagyományra, valamint a témakör újabb nemzetközi szakirodalmára építve. Témánk szűkre szabottsága arra sarkall minket, hogy rögtön rámutassunk két általánosítási lehetőségre. Egyrészt a törtek tanításának problémája az alsó és felső tagozat közötti átmenet általános oktatás-módszertani nehézségeit hívja elénk. Másrészt a törtek tanításában uralkodó multimodális felfogás más matematikai témák, sőt, más tantárgyak számára is tanulságokat rejt.

Fogalmi kérdések a törtek tanításának oktatás-módszertanában

A Matematika Tantárgypedagógiai Füzetekben, amely sorozat Kárpát-medence-szerte a tanítóképzés fontos forrásmunkáját jelenti, *C. Neményi Eszter* (2008) a törtszámok tanításáról szóló részt két nagy egységre osztja, nagyjából két egyforma terjedelműre. Elsőként az egységtörtek megismeréséről, a tapasztalatszerzés a fogalomalakítás lépéseiről ír, és ezt követi az egységtörtek többszöröseivel ismerkedés. E második nagyobb egység végén, két oldalon foglalkozik a törteknek azzal az értelmezésével, amelyben az egységtörtek és azok többszörösei felől haladással szemben két egész szám hányadosaként értelmezzük a törteket.

Amikor általános iskolai matematikai tanulmányaink során számhalmazokról tanultunk, akkor a racionális számok halmazánál találkoztunk azzal, hogy a racionális számok felírhatók két egész szám hányadosaként. A kétharmad például racionális szám, mert kettőt hárommal osztva megkapjuk, de ugyanígy a kettő is racionális szám, mert mondjuk négy osztva kettővel alakban megkapható. Függetlenül azonban a racionális számok szoros értelemben vett matematikai értelmezésétől, a pedagógia számára igazán izgalmas kérdések a racionális számok, ezen belül a „valódi" törtszámok mentális reprezentációval kapcsolatosak. Valódi törtnek a matematikában – kissé régiesen – a nulla és egy közötti racionális számokat hívjuk.

C. Neményi (2008) a törtszámok tanítására kétféle megközelítést tárgyal, ám ezek közül az egyiket fejti ki részletesen, és ajánlja a gyakorlat számára, míg az úgynevezett „második értelmezésről" egy rövid áttekintést ad, azzal az instrukcióval, hogy „van olyan elképzelés, amely szerint ezt a megközelítést lenne érdemes előbb kidolgozni, s csak aztán kapcsolni hozzá a másikat." (120. o). Ez a gyakorlatban azt jelentené, hogy egész számok hányadosaiként vezetnénk be a törteket, majd ebből a megközelítésmódból speciális esetként adódnának az egységtörtek, melyek az első, részletesen kifejtett megközelítésmód alapját szolgáltatják. Ugyanott így folytatja: „Lehetséges, hogy azoknak a gyerekeknek, akik a számok sokféle »műveletes alakjával« korán megbarátkoznak, nem okozna gondot ez az építkezés sem. Személyes tapasztalat híján azonban nem tudjuk meggyőződéssel javasolni ezt a sorrendet." (uo.)

A tankönyvekből rekonstruálható hazai körkép után a nemzetközi szakirodalomban rendelkezésre álló empirikus eredmények áttekintésével igyekszünk következtetéseket levonni a hazai tanítási gyakorlat számára. A nemzetközi szakirodalom áttekintésével egyrészt kiderülhet, hogy nem szükséges éles fogalmi választóvonalat tenni a kétféle törttanítás közé, azaz az egységtörtek többszörösei és a két egész szám hányadosára építő felfogások között nem feltétlenül van éles határvonal. Ami viszont bizonyos, hogy a törtek tanításában a „multimodális" felfogás elsőbbségét igazolja a szakirodalom (összhangban C. Neményi Eszter felfogásával), és ezen belül vannak további árnyalatok (számítógépes támogatás, a konkrét tartalmi területek, ahol törtek megjelennek: pl. csoki, óra, hosszúság).

A törtek tanítása az alsó tagozaton kezdődik, de a törtfogalom kialakulása már megkezdődik az óvodás korban. Magyar nyelvű publikációkból is megismerhető már a természetes számok agyi és mentális reprezentációira vonatkozó hármaskód-elmélet, amely elsősorban Stanislas Dehaene nevéhez köthető (l. *Csíkos és Dobi*, 2001). Ez alapján a matematikadidaktika gyakorlatát is egyre inkább áthatja az a felismerés, hogy idegrendszerünkben különböző helyek felelősek a természetes számok tárolásáért és felidézéséért. A szám kimondott neve az egyik forrás, és ezzel magyarázható, hogy a számolás lényegében mindenkinél egy nyelvhez kötődik, amely nyelven elsőként megjelennek a számok nevei. Ez legtöbbször az anyanyelv, de ha az iskoláztatás más nyelven történik, az iskolában használt nyelven. A számok puszta neveit ugyan már az óvodások is képesek kántálni (számmondókákkal), de a számnevekhez kötődő mennyiségreprezentációk kialakulása éveket vesz igénybe. Az ujjak, a dobókocka pöttyei, később a mentális számegyenes jelentik a legkézenfekvőbb reprezentációk bázisát. Iskoláskorban csatlakozik ehhez a két kódhoz harmadikként a számok leírt alakja, a mi kultúránkban ma elsősorban az arabnak nevezett számok. Vajon van-e hasonló hármas rendszer a törtszámokra?

Az bizonyos, hogy a törtek nevei is előbb megjelennek a gyermeki szóhasználatban, mint a hozzájuk kötődő mennyiségreprezentáció vagy szimbolikus jelölés. Legnagyobb eséllyel a „fél", „fele" törtszámokat fogják a gyermekek elsőként használni. A négyévesek pontosan végre tudják hajtani azt az utasítást, hogy adja a babának a süteménye vagy a pizzája felét. Ugyanakkor az $\frac{1}{4}$- del vagy a $\frac{3}{4}$-del hét éves korig várnunk kell (*Siegler, Fazio, Bailey és Zhou*, 2013). A gyerekek a mindennapi életük során sokféle tapasztalatot szereznek a mennyiségekről. „Mire iskolába lépnek a gyermekek, általában már világos fogalmuk van a félről, sőt a negyedről is." (*Peller*, 2011, 130. o.).

Kérdés, amelyre a választ csak a legutóbbi években találta meg az emberiség (l. később, a nemzetközi szakirodalommal foglalkozó részben), hogy az agyunkban a törtszámok vajon a természetes számokhoz hasonló hármas kóddal vannak-e jelen. A kérdés a matematikadidaktika szempontjából is jelentős, mert előfordulhat, hogy a természetes számok hármas rendszerére épül a törtszámok agyi reprezentációja, és ebben az esetben a fejlesztés analógiája a C. Neményi-féle „második értelmezést" támogathatja.

A törtek tanításának iskolai gyakorlata Magyarországon a tankönyvek tükrében

Az áttekintés végén látni fogjuk, hogy a mai napig a C. Neményi Eszter által javasolt felépítés jelenik meg a magyar közoktatásban. Alsó tagozaton a törtek értelmezése esetén szinte kizárólag az első értelmezést tanítják, a „második értelmezést" egyes tankönyvek meg sem említik, más könyvek tesznek róla említést, de csupán néhány javaslat jelenik meg a kézikönyvekben, hogy célszerű megmutatni a „második értelmezést. Feladatokat nem, vagy alig találunk erre. Az egységtörtek többszöröseinek vizsgálata általában 4. osztályra marad. Minden tankönyvben megjelenik valamilyen szinten, de alig találunk hozzá feladatokat.

C. Neményi Eszter azon felvetése, hogy a számok sokféle „műveletes alakjával" ismerkedjenek meg a gyerekek, inkább a felső tagozaton képzelhető el. Ott viszont jó lenne, ha a „multimodális" felfogás megjelenne és a különféle (immár nem egy vagy kétféle) értelmezések közötti kapcsolatot is hangsúlyoznánk. Ezt több nemzetközi kutatás igazolta. Többek között *Moseley* (2005) tanulmánya szerint, a tanulók racionális szám megértése növekedett, ha többféleképp tanították a törteket, nem csak rész-egész helyzetben. A TIMSS vizsgálatai is rámutattak (*Brenner és mtsai* 1997; *Mullis és mtsai*, 1997), hogy a kiemelkedő teljesítményű nemzetek diákjai – szingapúri vagy japán – rugalmasan értelmezték a racionális számokat.

Már *Beke Manó* (1909) a magyar matematikatanítás reformjának vezető egyénisége is foglalkozott a XX. század elején azzal a kérdéskörrel, hogy a törtek tanítása hogyan kezdődjön. A közönséges és a tizedestörtek tanítása közül a közönséges törtekkel való indítás mellett foglalt állást. Vita tárgyát képezte az is, hogy egyáltalán tanítsanak-e törteket.

> *„Még azon is vitatkoznak sokan, hogy kell-e törtszámokat tanítanunk? Mások meg azt a kérdést feszegetik, hogy mit kell előbb tanítanunk, a közönséges törteket-e vagy a tizedes törteket? És kuruczok meg labanczok, welfek és ghibellinek nem víttak elkeseredettebb harczokat, mint az újabbkori számtani methodika e vitás kérdéseinek szóvivői... A közönséges tört ismeretének okvetlenül meg kell előznie a tizedes törtét. Már csak azon egyszerű okból is, hogy az egyszerűbb, a természetesebb előzze meg a complikáltabbat. De meg a gyermek tapasztalati körében is előbb jelentkezik a közönséges tört, mint a tizedes tört." (Beke, 1909, 169.o.)*

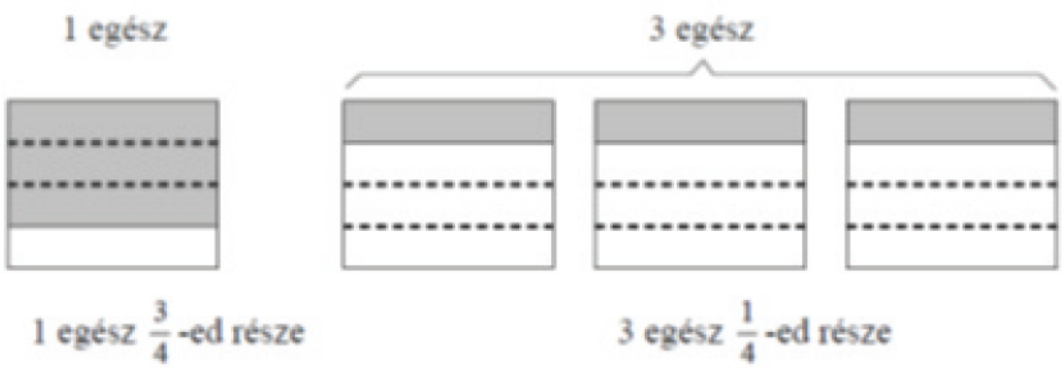
Ezt a gyakorlatot a mai napig megtartottuk, alsó tagozaton kezdenek ismerkedni a közönséges törtekkel. Az első értelmezésben az egységtörtekkel, majd ezek többszöröseivel. Később jelenik meg a „második értelmezés". Ma már nem vonják kétségbe, hogy szükséges megismerkedniük a gyermekeknek a törtekkel. Ugyanakkor az elsajátításának módjában nem találunk egységes állásfoglalást. A jelenleg a piacon található tankönyvek és módszertani útmutatók megosztottak abból a szempontból, hogy milyen mértékben és hogyan építik be a törtfogalom tanításába a C. Neményi-féle második értelmezést, de hozzá kapcsolódó feladatokat, vagy akár vizuális megjelenítést elvétve találunk csak az alsó tagozatos tankönyvekben. A tanítókkal folytatott beszélgetésekből általában az derül ki, hogy csak az „okos gyerekeknek" szokták megmutatni a második értelmezést.

Ha átlépünk a felső tagozatra, az ötödik osztályban megjelenik a „második értelmezés", és rohamléptekben a többi is, de talán nem kap kellő hangsúlyt, nem erősítik kellőképpen a gyermekekben, hogy itt többfajta értelmezésről van szó, és ezek között kapcsolat van. A későbbi sikertelenségek egyik forrása lehet, hogy nem tudatosul a tanulókban, hogy a törteknek többfajta értelmezése létezik, az értelmezések közötti kapcsolat megmutatása, erősítése és legfőképpen a manipulatív tevékenységek nagyfokú visszaszorulása a felső tagozaton forrása lehet a közismerten igen gyenge matematikai teljesítménynek. *Dienes Zoltán* (1973) is hasonlóan vélekedik: szerinte azért nehéz sokak számára a matematika, mert a matematikai fogalmakat nem képesek valamilyen képzethez, tapasztalathoz vagy tárgyhoz kapcsolni. Ha a tanulók ismeretei valamilyen korábbi ismerethez, képzethez kapcsolódnak, akkor könnyebb a felidézés, az ismeret tartósabbá, alkalmazhatóbbá válik.

Jelen pillanatban többféle matematikatankönyv van forgalomban Magyarországon. Ezekhez találunk tanári kézikönyveket, amelyek módszertani ajánlásokat is megfogalmaznak. Ha megvizsgáljuk ezeket a könyveket, kézikönyveket, módszertani ajánlásokat, néhány következtetést levonhatunk. Az alsó tagozat végén jó lenne, ha már megjelenne a „második értelmezés", de ez a gyakorlatban elvétve fordul elő. A felső tagozaton ötödik osztályban tananyag a második és a többi értelmezés is. De egyrészt tekinthetnek rá úgy, hogy ezt már ismerik a gyerekek, másrészt rohamléptekben haladva nem jut idő a fogalom kialakítására, elmélyítésére, arra, hogy valóban megjelenjenek a mentális reprezentációk.

A probléma forrása lehet a tagozat és tanárváltás, esetleges egymásra mutogatás, hiszen a tanító gondolhatja, hogy majd felsőben megtanulja, a felsős tanár feltételezheti, hogy már alsóban megtanulta. Ennek alátámasztására, ha beletekintünk a kézikönyvekbe, a következőket találjuk: *Török Tamás* (2016) a tanítóknak szánt matematika-kézikönyvében azt írja, hogy „a törtek bevezetéséhez (a természetes, majd az egész számfogalom kialakításához hasonlóan) sem kezdhetünk absztrakt módon, tárgyiasítást és tevékenységet nélkülöző fogalmak, illetve formális műveletvégzési technikák bemutatásával. A szemléletes út megkerülésével a matematikai ismeretelsajátítás lényegéről, a megértésről mondanánk le, amely nyilván nem lenne kívánatos. A törtfogalom alakításához sok-sok tevékenységen keresztül megszerezhető tapasztalatra van szükség. A *NAT* (2012) 3–4. osztályban tananyagként rögzíti a törtszámokkal való ismerkedést, mennyiségek mérőszámaként történő értelmezését. Elvárja továbbá az ily módon származtatott mennyiségek összehasonlítási képességének megszereztetését." (A törtfogalom kialakítása, 5. o.) Ehhez a szerző felajánlja a törtek első és „második értelmezését" is.

Például a következő módon mutatja be a $\frac{3}{4}$ értelmezését:



A gyakorlatban is megvalósítható, kézbe vehető, ízlelhető, igazságérzetünket is kiszolgáló osztozkodást szemléltet a következő ábra, amelyen a $\frac{3}{4}$ kétféle értelmezését látjuk. Ha valakinek háromnegyed tábla csokoládé jut, akkor lehet, hogy egy tábla csoki negyedének a háromszorosát kapja, de történetbe jobban beágyazható, ha három teljes tábla négy felé osztását valósítjuk meg – mindössze két felezéssel, vagy egy darab negyedeléssel.

Az első értelmezéshez az egységtörtek, majd ezek többszöröseinek bevezetése szükséges. A „második értelmezés" szemléltetése azért körülményesebb, mert az egészet meg kell többszörözni, és mindegyiken végrehajtani az egyenlő részekre osztást. *Török* (2016) is megerősíti, hogy a tankönyvi feladatok szinte kizárólag az 1. értelmezéshez kapcsolódnak, ezért néhány osztozkodási problémán keresztül célszerű felfedeztetni, hogy a C. Neményi-féle második értelmezés is ugyanazt a mennyiséget számszerűsíti.

A hozzá kapcsolódó, ötödik osztálynak készült tankönyv (*Csahóczy és mtsai*, 2016) kézikönyve úgy fogalmaz, hogy alsó tagozaton már ismerkedtek a kétféle értelmezéssel a tanulók. A Wintsche alkotószerkesztésével készült újgenerációs OFI-tankönyv (*OFI*, 2016a) nem utal expliciten az alsó tagozatos előzményekre.

Másik tankönyvcsaládot (*Hajdu* és mtsai, 2013, *Hajdu* és mtsai, 2014) vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy ötödik-hatodik osztályban nagy hangsúlyt helyeznek a kétféle értelmezés és ezek közötti kapcsolat bemutatására, de a manipulatív tevékenységekhez kapcsolódó feladatok száma itt is alacsony. A tankönyvköz íródott programban (*Hajdu* és mtsai, 2003) így fogalmaznak: „Az alsó tagozaton a törtszám fogalmának kialakítása, elmélyítése, a törtek átalakításának megtanulása, a törtekkel végzett műveletek értelmezése és begyakorlása a felső tagozat feladata. Az alsó tagozatban a fogalmak előkészítését, a szemléleti alapozást végezzük, nem a megtanítás, hanem a tapasztalatgyűjtés igényével." A felső tagozatos program (*Czeglédy és mtsai*, 2006) így fogalmaz: „A törtek fogalmának kialakítása alsó tagozaton kezdődik. Ezt az időszakot a manipulációnak és a tapasztalatgyűjtésnek kell jellemeznie. Sem a ráfordítható óraszám, sem a tanulók fejlettsége, előképzettsége nem teszi lehetővé az absztrakciót. Az elsietett fogalomalkotás hátrányát igazából a felső tagozaton éreznénk, elsősorban akkor, amikor a tanulók olyan ismérveket is a törtek fogalomjegyei közé sorolnának, amelyek nem tartoznak oda, illetve több fogalmi jegyet elhagynának. A nem kellően megalapozott ismereteket a tanuló könnyen elfelejti, nem képes újszerű feladatban alkalmazni (transzferálni)" (80.o.).

A Mozaik Kiadó Sokszínű Matematika tankönyvcsaládjában 4. osztályban csak az első értelmezéssel találkozunk. Viszont ez az egyetlen könyv ahol már 4. osztályban törtalakban írják a törteket (Árvainé *és mtsai*, 2017), nem olyan módon, mint a többi könyv esetén: 3 negyed. Az ötödik osztályos tankönyvben (*Csordás és mtsai*, 2017) megjelenik a kétféle értelmezés, de hozzákapcsolódó feladat nagyon kevés van benne.

A Nemzeti Tankönyvkiadó gondozásában megjelent C. Neményi Eszter 3. osztályos tankönyvében (*C. Neményi és Wéber*, 2008) az egységtörtekkel és ezek többszöröseivel ismerkednek. A negyedik osztályos könyvben (*C. Neményi és Káldi*, 2009) a második értelmezés csak szövegben jelenik meg, rajz nem készült hozzá és feladatok sem kapcsolódnak hozzá. Viszont azt is megemlíti, hogy az egész számok is felírhatók törtalakban.

Az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet gondozásában megjelent kísérleti, illetve újgenerációs tankönyveket és munkafüzeteket áttekintve a harmadik osztályos taneszközökben (*OFI*, 2017a és *OFI*, 2017b) feladatokon keresztül megjelenik nem csak az első értelmezés, hanem a második is, sőt találkozunk folytonos mennyiségekből származtatott tört értelmezéssel, és a méréssel is. A negyedik osztályos taneszközökben (*OFI*, 2015a és *OFI*, 2015b) viszont már csak az egységtört és ennek többszörösei dominálnak, néhány folytonos mennyiséggel találkozhatunk a feladatokban. Az ötödik osztályos tankönyvben a törtek értelmezésének három definíciójával találkozunk. Korábban csak feladatok voltak. Összességében nagyon kevés feladatot tartalmaznak az ötödikes taneszközök (*OFI*, 2016a és *OFI*, 2016b) az értelmezésre, abból is csak az első értelmezésre, és a hirtelenjében bevezetett számegyenesen ábrázolásra. Az újgenerációs tankönyvekhez készült tanári kézikönyv (*OFI*, 2017c, 5. o.) megfogalmazza, hogy „az iskolai matematikatanítás csak úgy lehet hatékony, ha az ismeretek közvetítése a tanulók mindennapi életéből, környezetéből vett tapasztalatokra, tárgyakkal való manipulációjára épül." Ezt a törtek értelmezése esetén nem látszik megvalósulni. „A hiányos matematikai ismeretek akadályát jelentik a modellalkotásnak, és ezzel az alkalmazásnak is" (*OFI*, 2017c, 5.o).

A törtek matematikadidaktikai szempontú értelmezésének legalább 5 formája van. Az első a C. Neményi Eszter által is említett egységtörtek és ezek többszörösei, ez a nemzetközi irodalomban rész-egész néven szerepel. A „második értelmezés" a hányados néven lelhető fel külföldi kutatásokban, ami irányulhat az osztás eredményére vagy magát a folyamatot emeli ki.

C. Neményi Eszter (2008) egyetemi jegyzetében is megjelenik a tört helye a számegyenesen. A számegyenest korábban úgy hoztuk létre, hogy egy-egy pontjához hozzárendeltünk egy-egy természetes számot, úgy, hogy a szám a pontnak a 0-tól mért távolságát jelentse pozitív irányba. *C. Neményi Eszter* (2008, 119. o.) így fogalmaz ezzel kapcsolatban:

> *Annak ellenére, hogy a mérésből indultunk ki, mégis nagyobb fokú absztrakciót kíván, hogy egy ponthoz rendeljünk hozzá egy számot, mint amikor egy szakasz hosszát jelöljük vele. A törtszámok számegyenesen való elhelyezkedését is a 0-tól való távolságra építjük. Nem a szakaszhoz rendeljük azonban az adott egységgel mért hosszát, hanem egy ponthoz, ami ilyen messze van a 0-tól. Emellett azonban a számegyenes több konkrét tartalmú ismeretet fog össze, ezért nem kell siettetni."*

A nemzetközi irodalomban ez a megközelítésmód a mérés nevet viseli. A gyermekek ötödik osztályban közvetlenül a „második értelmezés" után ismerkednek vele.

C. Neményi Eszter (2008) jegyzetében úgy fogalmaz, hogy „a számok arányát szintén tört fejezi ki, ez a törtfogalom harmadik – [nálunk már a negyedik] – értelmezése." (126. o) Jellemző, hogy ezzel a megközelítésmóddal sem foglalkoznak alsó tagozaton, ám az OFI (2016a) újgenerációs tankönyvben a törtekkel foglalkozó fejezet első oldalán már megjelenik. A nemzetközi irodalomban ez az arány nevet viseli.

A matematikaoktatással foglalkozó alapvető szakirodalom említi még a műveletet, ami azt a szituációt hangsúlyozza, amiben a racionális számoknak mennyiségeket növelő/csökkentő szerepe van. Ez C. Neményi Eszternél nem jelenik meg, de *Ambrus* (2013) említi a törtek értelmezésénél a tanárképzésben használt módszertani jegyzetében.

Megvizsgálva a NAT 2012-t, az kijelenti, hogy az alsó tagozaton az ismeretszerzésnek szinte kizárólagos útja az induktív út. *C. Neményi Eszter* (2008, 120.o) úgy vélekedik: „A törteknek ezzel a második értelmezésével kapcsolatban nehezebb szemléletes képet alkotni, mint az elsővel. Ezért nem is feltétlenül kell hangsúlyosan találkozniuk vele a gyerekeknek már az alsó tagozaton." Ezt erősíti meg *Czeglédy István* (2000) a matematika-tantárgypedagógia jegyzetében, aki szerint alsó tagozaton a törtfogalom kialakítása csak elkezdődik sok manipulációval, játékos feladatokkal, és majd ötödik osztályban mutatjuk meg a gyermekeknek a törtek kétféle értelmezést.

Peller József (2011) is megemlíti, hogy a (magyar) oktatási gyakorlatban általában az első értelmezést választják. Véleménye szerint a gyerekek az első értelmezést annyira megszokják, hogy a másodikat már nehezen értik. Javaslata szerint ennek úgy vehetjük elejét, ha a törtek mindkét értelmezését megmutatjuk a tanulóknak megfelelő modell választásával.

A törtek tanításához kapcsolódó eredmények a nemzetközi szakirodalomban

A törtek tanításával kapcsolatos neveléstudományi kutatási eredmények szemezgetése előtt fontos visszakanyarodnunk a számok hármaskód-elméletéhez, olyan értelemben, hogy a természetes számok mellett vajon a törtszámokra is létezik-e hasonló. *Jacob, Vallentin és Nieder* (2012) fMRI-vizsgálatának eredményei szerint a törtszámok éppen azokat az agyi területeket aktivizálják, amelyeket a korábbi kutatások az egész számokhoz kapcsoltak. Ez azt jelenti, hogy van egy neuronhálózat, amely a kimondott törtszám-név tárolásáért és felidézéséért felelős; van egy terület, amely a törtszám reprezentációjáért, és van egy harmadik, amely a leírt törtszámnevet az előző kettőhöz kapcsolja. Az olvasó önmagán is könnyen elvégezheti azt a kísérletet, miszerint egy leírt törtszám olvastán automatikusan kimondjuk a törtszám nevét, és szerencsés esetben (ha a szövegkontextus ezt igényli) egy megfelelő mennyiségreprezentációt is társítunk hozzá. Látván leírva a $\frac{3}{4}$ törtet, számunkra természetes, hogy „háromnegyed" néven kiolvassuk, és ha szükséges, el tudjuk képzelni egy adott helyzetben, mit jelent, ha például a lakosság $\frac{3}{4}$ része városokban él. A törtek mennyiségi reprezentációiról önmagunk számára is nehéz számot adnunk. A vizuális reprezentációk is sokfélék lehetnek, akár vonalakkal, akár szalaggal, és ezen belül vízszintes vagy függőleges helyzetűn, vagy akár kördiagramon képzeljük el, mit jelent a lakosság háromnegyed része. *Jacob, Vallentin és Nieder* (2012) kutatása alapján a tanítás feladataként rögzíthetjük, hogy a törtszámok tanításában is háromféle modalitású információt kell egymással összekapcsolnunk. A természetes számok esetében a számok neveihez évek során kapcsoljuk a számok leírt alakját és igyekszünk hozzájuk megfelelő mennyiségi reprezentációkat kialakítani. A kisebb természetes számoknál a mennyiségi reprezentációk a számok leírása nélkül is pontosan kapcsolódnak a szám nevéhez a két kezünkön megszámolható mennyiségnél. A pápua okszapmin törzsnél például a testszámolás sémája 27-ig teszi lehetővé a számok nevének és a hozzájuk kötődő, jól vizualizálható mennyiségeknek összekapcsolását (ld. *Saxe, Dawson, Fall és Howard*, 1998). Hasonló a helyzet az egységtörteknél, amelyeknél egy szakasz vagy egy körlap (vagy akár másfajta vizuális mennyiségreprezentáció) részeihez kapcsoljuk a törtszámok kimondását az óvodás kor végétől kezdve.

Mindezek alapján adódik a következtetés, hogy a természetes szám fogalmának alakulásához hasonlóan a törtszám-fogalom fejlődésében is kulcsszerep jut a vizuális reprezentációknak. A vizuális reprezentációk szerepe egyre jelentősebb súlyúvá válik a matematikatanításban. *Csíkos, Szitányi és Kelemen* (2012) tanulmányának idevágó részei kiemelik, hogy nem önmagában a vizualitás mindenek fölötti elsőbbségét emeli ki a szakirodalom, hanem *Hegarty és Kozhevnikov* (1999) kutatása alapján legalább kétféle vizuális reprezentáció kap szerepet a matematikai gondolkodásban: sematikus és piktoriális reprezentációk. Világos, hogy a törtszám-fogalomhoz sematikus reprezentációk szükségesek, és – ahogyan utaltunk rá – ezek jellemzően vízszintes vagy függőleges vonalak, szalagok, esetleg kördiagramok. (Természetesen a piktoriális reprezentációk is jelentősek lehetne a törtszám-fogalom adott fejlődési szakaszában: előfordulhat, hogy a negyed egységtört tartósan az óra számlapjához vagy akár egy pizzaszelethez kapcsolódik.) Mivel az egyéni különbségek a törtszám-fogalom fejlődésében is jelentősek, csakúgy, mint a fogalom alkotóelemeként kiépülő vizuális reprezentációk, logikusnak látszik a sokféle reprezentációt felhasználó szemléltetést.

A racionális számok tanításában a multimodalitás szerepéről *Chanine* (2013) úgy vélekedik, hogy a különböző módszerek használatának hatása a diákok esetén fejleszti a törtes tudást. A kvantitatív és a kvalitatív elemzésekből származó bizonyítékok alátámasztják azt az állítást, miszerint többféle módszert alkalmazva megkönnyítjük az alapvető törtes fogalmak megértését. Ha csak a szimbólumok használatát hangsúlyozzuk, akkor az korlátozott képet ad a törtekről. Előfordulhat, hogy a törtek helyett csak számjegyeket látnak, és így nehéz összehasonlítani például a különböző alakúra vágott darabok képe által képviselt törteket. Ennek megfelelően a diagramok használata sem sokat segít az azonos nagyságú törtek felismerésében, csakúgy, mint az az algoritmus, amelyben a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a számmal szorozzuk. A tanulmányban az alapfeltevés az, hogy a multimodalitás használata a racionális számok tanítása során biztosítja az ilyen fogalmak megértését és javítja a diákok teljesítményét. Többféle módszert alkalmazva mérsékelték és következésképpen áthidalták a törtek konkrét ábrázolásának és az absztrakt kapcsolatok szétválasztását. *Monk* (2003) szerint nem az a cél, hogy kiválasszunk egy vagy két reprezentációs formát a diákoknak, amit megtanítunk nekik és ezt használjuk minden helyzetben, hanem az volna ideális, ha egy adott kontextushoz és célhoz különböző reprezentációkat alkalmazzanak.

A törtek iskolai tanításának módszerei idővel változtak. Az 1970-es évek előtt a törtek elméleti oktatására helyezték a hangsúlyt, és ezt formálisan mutatták be a tanulóknak. *Streefland* (1990) említi Dienes Zoltán 1967-ben megjelent könyvét a „Fractions – An Operational Approach"-ot, amelyben a törtek tanításának nagyon formális példáját mutatja be. Dienes Zoltán a világ számos országába dolgozott matematika – didaktikusként és nemzetközi hírnevet szerzett. Széles körben publikált a matematikatanulás lélektanáról; tanárok százaival és gyermekek ezreivel dolgozott. Fő célja az volt, hogy a megértést terjessze, és lelkesedést keltsen. Munkája során rengeteg játékos taneszközt fejlesztett ki.

Az 1980-as években indultak nagyszabású nemzetközi kutatások a diákok nehézségeinek feltárására a matematika különböző területein. A törtekre vonatkozó ismeretek és készségek vizsgálata (pl. *Ekenstam & Greger*, 1982; *Kerslake*, 1986) megmutatta a törtek fogalmának összetettségét és a megfelelő megértés nehézségeit. A tanárok egyre inkább tudatába lehetnek annak, hogy a törtek témája nehéz a tanulók számára és nagyobb figyelmet kell fordítani a törtek fogalmának kialakítására. Az utóbbi évtizedben a törtek tanításának különböző intuitív aspektusai kerültek a középpontba, ilyen a rész-egész, a hányados, a mérés, a művelet és az arány.

Alajmi (2011) három olyan ország matematika tankönyvét hasonlította össze, akik különböző szinten teljesítettek a TIMSS (*Gonzales és mtsai*, 2008; *Mullis és mtsai*, 1997) negyedik osztályos mérésén. Japán kiemelkedően, az USA az átlag körül és Kuvait az átlag alatt. Vizsgálatában a törtek tanítását vette górcső alá, mikor és hogyan kezdenek a törtekkel foglalkozni, milyen típusú feladatokat alkalmaznak és mennyit ismételnek. Japánban csak harmadik osztályban vezetik be a törteket és akkor is a lineáris modellt használják (hosszúságmérés méterben), vagy a méréshez kapcsolják a tört értelmezését (folyadékok mennyisége literben). Az USA-ban és Kuvaitban már első osztályban találkoznak a törtekkel, konkrét dolgokon keresztül mutatják be a törteket. Különösen Kuvaitban, néhány területmodell képi reprezentációján keresztül kerül bevezetésre a tört. Ezek a tankönyvek a számítási módszerek sztenderd algoritmusára fókuszálnak. Minden országban külön fejezetben foglalkoztak a törtekkel. A japán könyvek lényegesen kevesebb időt fordítanak a törtek tanítására, de azt úgy teszik, hogy hogy a gyermek életéből választanak problémát, vagy egy világjelenségre hívják fel a figyelmet, és ennek megoldására ösztönzik a tanulókat. Japánban a számegyenes használatára helyezik a hangsúlyt, ez segíti a tanulókat a törtek megjelenítésében és összehasonlításában. A törtek területmodelljét, mint például a rész-egész értelmezést, csak a vegyes szám összeadásánál, kivonásánál használják. Az amerikai könyvek az első három évfolyamon csak modelleket használnak, de ötödik osztályra hirtelen absztrakttá válik és lényegesen lecsökken a modellhasználat. Nagyobbrészt a területmodellt használják és a számegyenes csak a feladatok 20 %-ában jelenik meg. A japán könyvek gyakran mutatnak a gyermekeknek két megoldási módot és azt kérik tőlük, hogy hasonlítsák össze a két eljárást. A kuvaiti és az amerikai könyvek lényegesen többet ismételnek a korábbi évek anyagából, mint a japán.

Alajmi (2011) az alábbi következetéseket vonta le: a törtek korai bevezetése és ismétlése nem feltétlenül jelenti azt, hogy jobban fog menni a tanulás. Mind a kuvaiti, mind az amerikai diákok nehézségekbe ütköznek a szabályok alkalmazása során. A *National Research Council* (2001) ajánlását is figyelembe véve a törtek bevezetésével célszerű lenne megvárni a negyedik osztályt. Fontos lenne, hogy megmutassuk a diákoknak, hogy a törteknek az ő életükben is van jelentőségük. Az oktatásnak hangsúlyt kellene helyezni a törtek értelmezésére és a törtek nagyságának megértésére. A tankönyveknek a lineáris modellek használatára kellene összpontosítaniuk, segíteniük megérteni és összehasonlítani a törtek nagyságát.

A valós életből vett problémák fontosak a megértés folyamatában, áthidalják azt a szakadékot, ami az informális és a formális matematika között van. A választott kontextusnak nem feltétlenül kell igazinak lenni, lehet akár mesebeli is, mindaddig, amíg értelme van a gyermekek számára, és ösztönzik a matematizálási folyamatokat, amelyek potenciálisan relevánsak a valósághoz képest (*Selter*, 1998).

Zhang (2014) az egységtörtek értelmezését vizsgálta a területmodelltől indulva a multimodális megközelítésig. Fejlesztő kísérletében felhasználta *Dienes Zoltán* (1967) módszerét, amely szignifikáns javulást eredményezett. Itt jegyzi meg, „hogyha csak a területmodellt használjuk vagy ez az elsődlegesen használt modell és a többit elhanyagoljuk, akkor ez valószínűleg korlátozza a tanulók gondolkodását. Nyilvánvalóan itt az ideje, hogy áttérjünk a területmodell megközelítésről a multimodális megközelítésre, hogy megbízható fogalmakat alakítsunk ki a törtekről a gyermekek fejében" (257. o.).

Összegzés

Elemzésünk folyománya a gyakorlat számára, hogy a 4. és 5. osztályos tankönyvek, és ezekkel korrelálóan az oktatási megközelítésmódok és módszerek között rugalmas átmenetre van szükség. A tanítóképzésben, a tanítók továbbképzésein ezzel kapcsolatos teendőnk, hogy kitekintést nyújtunk arra vonatkozóan, milyen alapokat feltételeznek egyes témakörökben, így például a törtek vonatkozásában az 5. osztályos tankönyvek. A felső tagozaton oktatók számára pedig fontos bemutatni a tanárképzésben és a továbbképzéseken, hogy korántsem annyira stabil még 5. osztályos korban a törtfogalom, hogy a formalizálás és a hányadosként értelmezés gyorsan megvalósuljon. Nem csak ezen a területen, hanem például a természetes számok számköreinek bővítésében is szakadék tátong a taneszközökben és az alkalmazott módszerekben egyaránt.

C. Neményi Eszter azon az úton járt, amit Varga Tamás és munkatársai kijelöltek. Varga Tamás volt az egyetlen matematika-didaktika kutató, aki a teljes általános iskolai tantervet és a módszereket egységes egészként tekintette és alkotta meg a komplex matematikatanítási módszert. Varga Tamás folyamatosan bővítette, ellenőrizte a matematikatanításról kialakult koncepcióját és a világ számos kutató bázisával állandó kapcsolatot tartva formálta. Átvette és a magyar viszonyokhoz igazította a jó elgondolásokat, eredményeket. A legfontosabb, hogy elvetette a formalizmusba hajló tévutakat. Ez napjaink matematikaoktatásának is megfelelő irányt mutatna. A kezdeti időben folyamatos képzést tartott a tanítók számára, eredményeit beépítette módszerébe. Erre hivatkozva írja *C. Neményi Eszter* (2002b) a matematika tantárgy helyzetének elemzésében: „Igen nagy jelentősége lenne annak, hogy folyjanak nagyobb számban tantárgy-pedagógiai kutatások annak még hatékonyabb alátámasztására, hogy a 6–10 éves gyerekek ismeretelsajátítási folyamatát és kognitív képességei fejlődését milyen módon lehet a tanítói munkában szolgálni. Hogy ne lehessen – tudatlanságból vagy egyéb okokból – olyan módszereket kínálni és alkalmazni, amelyek hátráltatják a gyerekek fejlődését, fogalmi rendszerük épülését." Megállapítását kiegészíthetjük, hogy a felsőbb évfolyamokra ennek ugyanúgy igaznak kellene lennie. A törtfogalom-tanítás egyik problémájának áttekintése során végül ahhoz a merész következtetéshez is eljuthatunk, hogy a 21. században egy Varga Tamás komplex szemléletét tükröztető matematikaoktatásnak a sokféle vizuális reprezentáció felhasználásán kell alapulnia. Ha ehhez még hozzátesszük, hogy a sokféle vizuális reprezentációról való beszéd, a róluk való gondolkodás alsó tagozatos kortól megragadható lehetőség a matematikaórákon, akkor máris az emberi gondolkodás stratégiai összetevőinek átfogó fejlesztéséhez jutunk. Ez a gondolatmenet a törtfogalom alakításának alsó-felső tagozat közötti átmenetében felbukkanó problémán keresztül az oktatás kultúrájának általános kérdéseihez vezet el.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését az MTA–ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatás Kutatócsoport támogatta.

Felhasznált irodalom

Alajmi, A. H. (2011): How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, **79.** 2. sz., 239–261.

Ambrus Gabriella (2013): Matematikadidaktikai szemelvények II. Gondolatok a törtek tanításával kapcsolatban az 5–6. osztályban. In: Vásárhelyi Éva (szerk.) *Matematika módszertani példatár*. TAMOP4.1.2.A/1-11/1-2011-0064 jegyzet, 116–131.

Árvainé Libor Ildikó, Lángné Juhász Szilvia és Szabados Anikó (2017): *Sokszínű Matematika 4.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Beke Manó (1909): *A középiskolai matematika tanítás reformja*. Franklin Kiadó, Budapest.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Smith-Reed, B. et al. (1997): Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, **34.** 4. sz., 663–689. https://doi.org/10.3102/00028312034004663

C. Neményi Eszter (2002a): Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. *Új Pedagógiai Szemle*, **52.** 12. sz., 89–98.

C. Neményi Eszter (2002b): *A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. 1–4. évfolyam*, OFI, Budapest.

C. Neményi, Eszter (2008): *Relációk, függvények, sorozatok; A törtszám; A negatív szám.* ELTE TÓFK, Budapest.

C. Neményi Eszter és Káldi Éva (2009): *Matematika tankönyv. Általános iskola 4. osztály.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Wéber Anikó (2008): *Matematika tankönyv. Általános iskola 3. osztály.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter, Radnainé Szendrei Júlia és Varga Tamás (1981): Matematika 1-4. osztály. In: Szebenyi Péter (főszerk.), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve.* 2. kiadás. OPI.

Chahine, I. C. (2013). The impact of using multiple modalities on students' acquisition of fractional knowledge: An international study in embodied mathematics across semiotic. *The Journal of Mathematical Behavior*, **32.** 3. sz., 434–449. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.004

Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné és Szeredi Éva (2016): *Matematika 5. (AP).* OFI, Budapest.

Csíkos Csaba és Dobi János (2001): Matematikai nevelés. In: Báthory Zoltán és Falus Iván (szerk.) *Tanulmányok a neveléstudomány köréből – A Magyar Tudományos Akadémia Pedagógiai Bizottságának gyűjteménye*. Osiris, Budapest, 355–372.

Csíkos, C., Szitányi, J. & Kelemen, R. (2012): The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungairian students. *Educational Studies in Mathematics,* **81.** 1. sz., 47–65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

Csordás Mihály, Konfár László, Kothencz Jánosné, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára és Vincze Istvánné (2017): *Sokszínű matematika 5.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Czeglédy István, Orosz Gyuláné, Szalontai Tibor és Szilák Aladárné (2000): *Matematika tantárgypedagógia II.*, Bessenyei György Könyvkiadó, Budapest.

Czeglédy István, Czeglédy Istvánné, Hajdu Sándor, Novák Lászlóné és Zankó Istvánné (2006): *Matematika 5. Program*. Műszaki Kiadó, Budapest.

Dienes, Z. P. (1967): *Fractions: an operational approach*. Herder and Herder, Portsmouth.

Dienes Zoltán (1973): Építsük fel a matematikát. Gondolat Kiadó, Budapest.

Ekenstam, A., & Greger, K. (1982): Non-algorithmic basic skills. *Journal für Mathematik-Didaktik,* **3.** 1. sz., 21–46. https://doi.org/10.1007/BF03338658

Gonzales, P., Williams, T., Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D. & Frenwald, S. (2008): *Highlights from TIMSS 2007: Mathematics science Achievement of U.S. fourth-and eighth-grade Students in an international context* (NCES 2009–001 Revised). National Center for Education Statistics, US Department of Education, Washington.

Hajdu Sándor, Köves Gabriella, Novák, Lászlóné és Scherlein Márta (2003): *Matematika 4. Program*, Műszaki Kiadó, Budapest.

Hajdu Sándor, Czeglédy István, Czeglédy Istvánné és Zankó Istvánné (2013): *Gondolkodni jó! Matematika 5.* Műszaki Kiadó, Budapest.

Hajdu Sándor, Czeglédy István, Czeglédy Istvánné és Zankó Istvánné (2014): *Gondolkodni jó! Matematika 6.* Műszaki Kiadó, Budapest.

Jacob, S. N., Vallentin, D. & Nieder, A. (2012): Relating magnitudes: the brain's code for proportions. *Trends in Cognitive Sciences,* **16.** 3. sz., 157–166. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.02.002

Kerslake, D. (1986): *Fractions: Children's strategies and errors.* The NFER – NELSON Publishing Company Ltd., Windsor, Berkshire.

Monk, S. (2003): Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. In: J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (eds.) *Research companion to principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 250–261.

Moseley, B. (2005): Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics,* **60.** 1. sz., 37–69. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5031-2

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelley, D. L. & Smith, T. A. (1997): *Mathematics achievement in the primary school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS). Boston College, Boston.

National Research Council (2001): *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press, Washington.

Nemzeti Alaptanterv (2012): *Magyar Közlöny,* 66, 10639–10847.

OFI (2017a): *Matematika 3. Újgenerációs tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2017b): *Matematika 3. Munkafüzet II. kötet. Újgenerációs tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2015a): *Matematika 4. Kísérleti tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2015b): *Matematika 4. Munkafüzet II. kötet. Kísérleti tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2016a): *Matematika 5. Újgenerációs tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2016b): *Matematika 5. Munkafüzet. Újgenerációs tankönyv*. OFI, Budapest.

OFI (2017c): *Tanári kézikönyv a matematika 5–6. Újgenerációs tankönyvekhez.* OFI, Budapest.

Peller József (2011): *A matematikai ismeretszerzési folyamatról.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

Saxe, G. B., Dawson, V., Fall, R. & Howard, S. (1996): Culture and childrens mathematical thinking. In R. J. Stenberg & T. Ben-Zeev, (eds.) *The nature of mathematical thinking.* Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 119–144.

Siegler, R. S., Fazio, L. K.,. Bailey, H.K & Zhou, X. (2013): Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences,* **17.** 1. sz., 14–19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Sriraman, B. & English, L. (2005): On the teaching and learning of Dienes' principles. *International Reviews in Mathematics Education (ZDM),* **37.** 3. sz., 258–262.

Streefland, L. (1990): *Fractions in realistic mathematics education, a paradigm of developmental research.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Török Tamás (2016): *Tanító kézikönyv Matematika, 1–4. osztály*, OFI, Budapest.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000): *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute CD-rom for ICME9.* Utrecht University, Utrecht.

Zhang, X., Clements, M. A. K. & Ellerton, N. F. (2014): Conceptual mis(understandings) of fractions: From areamodels to multiple embodiments. *Mathematics Education research Journal,* 72, 233–261.

Fostering the concept of fractions at the boundary of primary and lower secondary school grades

This paper focuses on the ways of fostering the concept of fractions. The main concern to be discussed is the controversy between the concept of fractions pupils possess at the end of their primary school years (Grade 4) and the expectation raised by the textbooks in Grade 5. In their primary years, students encounter fractions as either fractions with 1 as numerator or the multiples of such fractions – both with various kinds of manipulative or visual aids. To the contrary, in Grade 5, fractions immediately appear as rational numbers, i.e., the ratio of two whole numbers. In order to appropriately build the concept of fractions in Grade 4, we advise to emphasize the so-called "second interpretation" (C. Neményi) of fractions. This "second interpretation" of the multiples of fractions with 1 as numerator means that multiples of a unit are divided into equal parts according to the denominator. Our message has been approved and supported by means of analyzing textbook passages and results available in the international literature.

Keywords*: concept of fractions, primary school, mathematics, lower secondary school mathematics, illustration, textbook analysis*

Karika Tímea – Csíkos Csaba (2018): A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határán. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 86–98.